

Etude Asymptotique de la Densité Associée à un Filtre d'Ordre Infini

Denis Bosq*

Résumé

Etant donné un filtre de la forme

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

on étudie le comportement asymptotique de la densité du vecteur $(Y_t, X_t, \dots, X_{t-k})$ lorsque k tend vers l'infini.

Ce problème est lié à l'estimation des a_j par une méthode de maximum de vraisemblance empirique.

Abstract

We consider the filter

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

and we study the asymptotic behaviour of the density of $(Y_t, X_t, \dots, X_{t-k})$ when k tends to infinity.

This problem is connected with the estimation of the a_j 's by an empirical maximum likelihood method.

*LSTA, Université Paris VI

Received by the editors April 1993 - Revised July 1993

Communicated by M. Hallin

AMS Mathematics Subject Classification : Primary 62M20, Secondary 62G05

Keywords : linear filter, density estimation, empirical maximum likelihood, Kullback information.

1 Introduction

Soit (X_t, Y_t, ϵ_t) , $t \in \mathbb{Z}$ un processus à trois dimensions tel que

$$(1) \quad Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Nous supposons que (X_t) et (ϵ_t) sont formés de variables i.i.d. et que ϵ_t est indépendant de (X_t, X_{t-1}, \dots) pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Les a_j sont des réels vérifiant $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < +\infty$ et si $EX_0^2 < +\infty$ la série $\sum a_j X_{t-j}$ converge presque sûrement et en moyenne quadratique (cf. [6] p. 51).

Pour estimer les a_j on peut utiliser une méthode définie et étudiée dans [1] et [2]. Elle consiste à maximiser un estimateur de la densité f_k de $Z_{t,k} = (Y_t, X_t, \dots, X_{t-k})$. Pour étudier le comportement asymptotique de cet estimateur on fait tendre k vers l'infini avec la dimension du vecteur observé. Aussi ce travail est-il consacré à l'étude du comportement asymptotique de f_k lorsque k tend vers l'infini.

Il est clair, qu'en général, on n'aura pas $f_k \rightarrow f$ où f est une densité sur R^∞ car la loi de $(Y_t, X_t, X_{t-1}, \dots)$ est étrangère à λ^∞ (λ désignant la mesure de Lebesgue sur R).

Ainsi pour des lois concentrées sur $[0, 1]$ la loi de (X_t, X_{t-1}, \dots) et la restriction de λ^∞ à $[0, 1]^\infty$ sont étrangères (cf. [5] p. 42), donc la loi de $(Y_t, X_t, X_{t-1}, \dots)$ et la restriction de $\lambda \times \lambda^\infty$ à $[0, 1] \times [0, 1]^\infty$ le sont également.

2 Le cas Gaussien

Nous commençons par envisager le cas où $X_t \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$ et $\epsilon_t \sim N(0, \eta^2)$ $\eta > 0$. La loi de $Z_{t,k}$ est alors gaussienne de densité

$$(2) \quad f_k(y; x_0, \dots, x_k) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^{k+1}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \frac{x_j^2}{\sigma^2}\right] \times \\ \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\left(y - \sum_{j=0}^k a_j x_j\right)^2}{\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2}\right]$$

pourvu que η soit non nul ou qu'il existe une infinité de a_j non nuls ce que nous supposerons toujours dans la suite.

Théorème 1.

1) Pour $\eta > 0$ et k tendant vers l'infini

$$E \operatorname{Log} f_k(Z_{t,k}) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \sigma < \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \\ \operatorname{Log} \frac{1}{n\sqrt{2\pi e}} & \text{si } \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \\ -\infty & \text{si } \sigma > \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \end{cases}$$

et dans tous les cas $\frac{1}{k} E \operatorname{Log} f_k(Z_{t,k}) \rightarrow \operatorname{Log} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

2) Pour $\eta = 0$ et k tendant vers l'infini

a) $E \operatorname{Log} f_k(Z_{t,k}) \rightarrow +\infty$ si $\sigma < \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$.

b) Pour $\sigma > \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$ le comportement de $E \operatorname{Log} f_k(Z_{t,k})$ dépend de celui de

$$\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2 \text{ ainsi:}$$

- Pour $a_j = \alpha j^{-\beta}$, $\beta > 1$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, $E \operatorname{Log} f_k(Z_{t,k}) \rightarrow -\infty$.

- Pour $a_j = \alpha \rho^j$, $0 < |\rho| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$E \operatorname{Log} f_k(Z_{t,k}) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \sigma < \frac{1}{|\rho|\sqrt{2\pi e}} \\ \operatorname{Log} \frac{|\rho|(1-\rho^2)^{1/2}}{|\alpha|} & \text{si } \sigma = \frac{1}{|\rho|\sqrt{2\pi e}} \\ -\infty & \text{si } \sigma > \frac{1}{|\rho|\sqrt{2\pi e}} \end{cases}$$

- Pour $a_j = \alpha \rho'^j$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $0 < |\rho| < 1$, $\rho' > 1$, $E \operatorname{Log} f_k(Z_{t,k}) \rightarrow +\infty$.

Démonstration: D'après (2) nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} f_k(Z_{t,k}) &= -(k+1) \operatorname{Log} \sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=0}^k X_{t-j}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{Log} (\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2) - \operatorname{Log} \sqrt{2\pi} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(\epsilon_t + \sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j})^2}{\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2} \end{aligned}$$

d'où

$$E \operatorname{Log} f_k(Z_{t,k}) = (k+1) \operatorname{Log} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} - \frac{1}{2} \operatorname{Log} (\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2) + \operatorname{Log} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$

donc pour $\eta > 0$ et $\sigma \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$, $E \text{Log } f_k(Z_{t,k})$ se comporte comme $(k+1) \text{Log } \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$ et, pour $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$, comme $-\frac{1}{2} \text{Log}(\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2) + \text{Log } \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$. 1) et 2)a) s'en déduisent.

Maintenant, pour $\eta = 0$ nous avons

$$E \text{Log } f_k(Z_{t,k}) = (k+2) \text{Log } \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} + \text{Log } \frac{1}{\sqrt{\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2}}$$

or, pour $a_j = \alpha j^{-\beta}$ il vient $\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2 \sim \frac{\alpha^2}{1-2\beta} \frac{1}{k^{1-2\beta}}$

donc $E \text{Log } f_k(Z_{t,k}) \rightarrow -\infty$ si $\sigma > \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$.

Pour $a_j = \alpha \rho^j$ on a $\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2 = \frac{|\alpha|^2 |\rho|^{2k+2}}{1-|\rho|^2}$ d'où

$$E \text{Log } f_k(Z_{t,k}) = (k+2) \text{Log } \frac{1}{\sigma|\rho|\sqrt{2\pi e}} + \text{Log } \frac{|\rho|(1-\rho^2)^{1/2}}{|\alpha|}$$

d'où les résultats annoncés.

Enfin pour $a_j = \alpha \rho'^j$ on a $\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2 \leq A(\rho')^{\rho'^{k+1}}$ où A est une constante positive,

d'où

$$E \text{Log } f_k(Z_{t,k}) \geq (k+2) \text{Log } \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} + \text{Log } \frac{1}{\sqrt{A}} \rho'^{k+1} \text{Log } \frac{1}{|\rho'}}$$

et le minorant tend vers $+\infty$. \square

Théorème 2. Pour $\eta > 0$ et k tendant vers l'infini

$$(3) \quad \frac{1}{k+1} \text{Log } f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.co.}} \text{Log } \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$

et

$$(4) \quad S_k = \sqrt{\frac{2}{k+1}} [(\text{Log } f_k(Z_{t,k}) + (k+1) \text{Log } \sigma\sqrt{2\pi e})] \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

Démonstration: Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} \text{Log } f_k(Z_{t,k}) &= -\text{Log } \sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2(k+1)} \sum_{j=0}^k X_{t-j}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} (\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2) - \frac{1}{k+1} \text{Log } \sqrt{2\pi} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} \frac{(\epsilon_t + \sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j})^2}{\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2}. \end{aligned}$$

Comme $EX_0^8 < \infty$ on peut affirmer que

$$\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k X_{t-j}^2 \xrightarrow{\text{p.co.}} \sigma^2.$$

D'autre part, comme $\epsilon_t + \sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j}$ est Gaussienne l'inégalité de TCHEBYCHEV s'écrit

$$\forall \epsilon > 0, \quad P \left[\frac{1}{k+1} \frac{\left(\epsilon_t + \sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} \right)^2}{\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2} > \epsilon \right] \leq \frac{2}{(k+1)^2 \epsilon^2}$$

(3) se déduit de ce qui précède.

D'autre part, d'après le théorème central limite

$$\sqrt{\frac{2}{k+1}} \left(\sum_{j=0}^{k+1} \frac{X_{t-j}}{2\sigma^2} - \frac{k+1}{2} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$$

mais

$$T_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{\left(\epsilon_t + \sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} \right)^2}{\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2} \xrightarrow{p} 0$$

or

$$S_k = \sqrt{\frac{2}{k+1}} \left(\frac{k+1}{2} - \sum_{j=0}^{k+1} \frac{X_{t-j}^2}{2\sigma^2} \right) - T_k - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \left(\eta^2 + \sigma^2 \sum_{k+1}^{\infty} a_j^2 \right) - \sqrt{\frac{2}{k+1}} \text{Log} \sqrt{2\pi}$$

d'où (4). \square

Pour $\eta > 0$ et $\sigma\sqrt{2\pi e} = 1$ ainsi que pour $\eta = 0$, $a_j = \alpha\rho^j$ et $\sigma\sqrt{2\pi e} = \rho$ la loi du logarithme itéré permet de préciser le comportement asymptotique de $\text{Log} f_k(Z_{t,k})$. Nous renvoyons aux paragraphes suivants pour les détails.

3 Le cas général

On suppose maintenant que X_t et ϵ_t sont dans $L^2(P)$, centrées, de variance respectives σ^2 et η^2 , de densités respectives g et φ non nécessairement Gaussiennes.

Nous désignons par φ_k la densité de $\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t$ et par η_k^2 sa variance. Alors, si f_k désigne la densité de $Z_{t,k}$, nous avons

$$(5) \quad f_k(x_t, \dots, x_{t-k}; y) = g(x_t) \dots g(x_{t-k}) \varphi_k \left(y - \sum_0^k a_j x_{t-j} \right)$$

$$(x_t, \dots, x_{t-k}; y) \in R^{k+2}.$$

(5) montre que le comportement asymptotique de $\text{Log } f_k(Z_{t,k})$ dépend de celui de φ_k . Le théorème suivant lui est consacré:

Théorème 3.

1. Si φ est continue et tend vers 0 à l'infini

$$\sup |\varphi_k - \varphi| \rightarrow 0 \text{ et } \int |\varphi_k - \varphi| \rightarrow 0.$$

2. Si, de plus, $\varphi_k \text{Log } \varphi_k$ ($k \geq 1$) et $\varphi \text{Log } \varphi$ sont Lebesgue intégrables on a

$$\text{Log} \frac{1}{\eta \sqrt{2\pi e}} \leq \underline{\lim} \int \varphi_k \text{Log } \varphi_k \leq \overline{\lim} \int \varphi_k \text{Log } \varphi_k \leq \int \varphi \text{Log } \varphi.$$

3. Si, de plus, il existe a et b strictement positifs tels que

$$\varphi(x) \geq ae^{-b|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

et si $\varphi_k \text{Log } \varphi$ est Lebesgue intégrable pour k assez grand, alors

$$\int \varphi_k \text{Log } \varphi_k \rightarrow \int \varphi \text{Log } \varphi.$$

4. Si φ_k et φ sont Gaussiennes on a

$$\sup |\varphi_k - \varphi| \rightarrow 0, \int |\varphi_k - \varphi| \rightarrow 0, \int \varphi_k \text{Log } \varphi_k \rightarrow \int \varphi \text{Log } \varphi.$$

Démonstration:

1. Un théorème de convergence affirme que si (μ_k) est une suite de probabilités sur R qui converge faiblement vers μ , alors pour toute fonction h Lebesgue intégrable, continue et tendant vers 0 à l'infini on a

$$\sup_{x_0 \in R} \left| \int h(x_0 - x) d\mu_k(x) - \int h(x_0 - x) d\mu(x) \right| \rightarrow 0$$

et

$$\int \left| \int h(x_0 - x) d\mu_k(x) - \int h(x_0 - x) d\mu(x) \right| dx_0 \rightarrow 0$$

([3] p. 106).

Ce résultat s'applique ici pour $\mu_k = \mathcal{L}\left(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j}\right)$, $\mu = \delta(0)$ et $h = \varphi$.

2. Une propriété bien connue de l'entropie ([4] p. 243) permet d'écrire

$$\text{Log} \frac{1}{\eta_k \sqrt{2\pi e}} \leq \int \varphi_k \text{Log } \varphi_k, \quad k \geq 1$$

la première inégalité s'en déduit par passage à la limite inférieure.

Pour établir la dernière on commence par remarquer que l'on peut supposer que

$$(6) \quad \max(\sup_{x,k} \varphi_k(x), \sup_x \varphi(x)) < 1.$$

En effet, si $\sup_x \varphi(x) < 1$, comme $\sup |\varphi_k - \varphi| \rightarrow 0$ on a $\sup_x \varphi_k(x) \leq \frac{1+\sup \varphi}{2} < 1$ pour k assez grand ce qui suffit car la propriété cherchée est asymptotique. Si $\sup \varphi \geq 1$ on se donne $c > \sup \varphi$ et on remarque que

$$c\Delta_{k,t} = c \sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + c\epsilon_t \xrightarrow{\mathcal{L}} c\epsilon_t$$

or $c\epsilon_t$ a pour densité $\psi = \frac{1}{c}\varphi\left(\frac{\cdot}{c}\right)$ avec $\sup \psi < 1$ et $c\Delta_{k,t}$ a pour densité $\psi_k = \frac{1}{c}\varphi_k\left(\frac{\cdot}{c}\right)$. Alors

$$\int \psi_k \text{Log } \psi_k = \text{Log } \frac{1}{c} + \int \varphi_k \text{Log } \varphi_k$$

de même

$$\int \psi \text{Log } \psi = \text{Log } \frac{1}{c} + \int \varphi \text{Log } \varphi$$

donc il suffit d'établir l'inégalité

$$\overline{\lim} \int \psi_k \text{Log } \psi_k \leq \int \psi \text{Log } \psi.$$

Nous supposons donc que l'on a (6) ce qui permet d'appliquer le lemme de FATOU à la suite positive $(\varphi_k \text{Log } \frac{1}{\varphi_k})$:

$$\int \underline{\lim} \varphi_k \text{Log } \frac{1}{\varphi_k} \leq \underline{\lim} \int \varphi_k \text{Log } \frac{1}{\varphi_k}$$

soit

$$-\int \varphi \text{Log } \varphi \leq \overline{\lim} \int \varphi_k \text{Log } \varphi_k.$$

3. Pour établir la troisième partie nous supposons que $\sup \varphi < 1$. D'après ce qui précède il suffit de montrer que

$$\underline{\lim} \int \varphi_k \text{Log } \varphi_k \geq \int \varphi \text{Log } \varphi$$

or

$$(7) \quad \begin{aligned} \int \varphi_k \text{Log } \varphi_k - \int \varphi_k \text{Log } \varphi &= \int \varphi_k \text{Log } \frac{\varphi_k}{\varphi} \\ &= \int \left(\frac{\varphi_k}{\varphi} \text{Log } \frac{\varphi_k}{\varphi} + 1 - \frac{\varphi_k}{\varphi} \right) \varphi \geq 0 \end{aligned}$$

car $x \operatorname{Log} x + 1 - x \geq 0$ pour $x > 0$.

D'après (7) (qui est une propriété classique de l'information de KULLBACK) il suffit d'établir

$$\underline{\lim} \int \varphi_k \operatorname{Log} \varphi \geq \varphi \operatorname{Log} \varphi$$

mais

$$|\int (\varphi_k - \varphi) \operatorname{Log} \varphi| \leq \int |\varphi_k - \varphi| |\operatorname{Log} \varphi| \leq \sqrt{\int |\varphi_k - \varphi|} \sqrt{\int |\varphi_k - \varphi| (\operatorname{Log} \varphi)^2}$$

et comme $\int |\varphi_k - \varphi| \rightarrow 0$ il suffit de montrer que

$$\int |\varphi_k - \varphi| (\operatorname{Log} \varphi)^2 \text{ reste bornée quand } k \text{ tend vers l'infini.}$$

Or,

$$\operatorname{Log} a - b|x| \leq \operatorname{Log} \varphi(x) < 0, \quad x \in R$$

donc

$$(\operatorname{Log} \varphi(x))^2 \leq (\operatorname{Log} a)^2 - 2b \operatorname{Log} a \cdot (x) + b^2 |x|^2, \quad x \in R$$

d'où

$$\int |\varphi_k - \varphi| (\operatorname{Log} \varphi)^2 \leq$$

$$(\operatorname{Log} a)^2 \int |\varphi_k - \varphi| + 2b |\operatorname{Log} a| \int |x| (\varphi + \varphi_k) + b^2 \int x^2 (\varphi + \varphi_k),$$

et ce majorant est borné puisque la convergence en moyenne quadratique de

$\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t$ vers ϵ_t implique

$$\int x^2 \varphi_k \rightarrow \int x^2 \varphi \text{ et } \int |x| \varphi_k \rightarrow \int |x| \varphi.$$

4. Si φ_k et φ sont gaussiennes les convergences uniformes et en moyenne de φ_k vers φ sont des conséquences de la première partie. Mais on peut faire une démonstration élémentaire directe:

On écrit:

$$\frac{1}{\eta_k \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{1}{\eta \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha_k}{\eta_k} + \beta_k\right)$$

où

$$\alpha_k = \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta_k^2}\right) - \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta^2}\right)$$

et

$$\beta_k = \left(\frac{1}{\eta_k} - \frac{1}{\eta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta^2}\right).$$

Comme (η_k) tend vers η il suffit d'établir la convergence uniforme de α_k vers 0.

Or $\eta_k > \eta$ donc $|\alpha_k| = \alpha_k$ et comme $\alpha_k(0) = 0$, α'_k change de signe pour

$$\pm x_k = \pm \left(\frac{\text{Log } \frac{\eta_k^2}{\eta^2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta_k^2} \right)} \right)^{1/2}$$

le maximum de α_k vaut $\alpha_k(x_k)$ c'est-à-dire

$$\exp \left[-\frac{1}{2\eta_k^2} \frac{\text{Log } \frac{\eta_k^2}{\eta^2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta_k^2} \right)} \right] - \exp \left[-\frac{1}{2\eta^2} \frac{\text{Log } \frac{\eta_k^2}{\eta^2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\eta_k^2} \right)} \right]$$

et ceci tend vers zéro.

D'autre part, pour montrer que $\int |\varphi_k - \varphi| \rightarrow 0$ il suffit de prouver que $\int |\alpha_k| \rightarrow 0$, or

$$\int |\alpha_k| = \int \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\eta_k^2} \right) \left(1 - \exp \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{\eta_k^2} - \frac{1}{\eta^2} \right) \right) dx$$

et le théorème de la convergence dominée s'applique avec la fonction majorante $\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{1+\eta^2} \right)$.

Enfin

$$\int \varphi_k \text{Log } \varphi_k = \frac{1}{\eta_k \sqrt{2\pi e}} \rightarrow \frac{1}{\eta \sqrt{2\pi e}} = \int \varphi \text{Log } \varphi. \quad \square$$

Nous pouvons maintenant indiquer le comportement de $E \text{Log } f_k(Z_{t,k}) = m_k$.

Théorème 4.

1. Sous les hypothèses du théorème 3.2 et si $g \text{Log } g$ est intégrable Lebesgue il vient

$$\int g \text{Log } g > 0 \Rightarrow m_k \rightarrow +\infty$$

$$\int g \text{Log } g < 0 \Rightarrow m_k \rightarrow -\infty$$

$$\int g \text{Log } g = 0 \Rightarrow \text{Log } \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi e}} \leq \underline{\lim} m_k \leq \overline{\lim} m_k \leq \int \varphi \text{Log } \varphi.$$

2. Sous les hypothèses du théorème 3.3: $\int g \text{Log } g = 0 \Rightarrow m_k \rightarrow \int \varphi \text{Log } \varphi$.

Démonstration: De (5) on déduit

$$m_k = (k + 1) \int g \text{Log } g + \int \varphi_k \text{Log } \varphi_k.$$

Comme $\int \varphi_k \text{Log } \varphi_k$ reste asymptotiquement borné il est clair que, pour $\int g \text{Log } g \neq 0$, m_k tend vers l'infini avec le signe de $\int g \text{Log } g$.

Si $\int g \text{Log } g = 0$ les résultats sont des conséquences immédiates du théorème 3 (2 et 3). \square

Théorème 5.

1. Si φ est continue strictement positive et tend vers 0 à l'infini et si $g \text{Log } g$ est Lebesgue intégrable, on a

$$(8) \quad \frac{1}{k+1} \text{Log } f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int g \text{Log } g$$

et par conséquent

$$(9) \quad \int g \text{Log } g > 0 \Rightarrow f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} +\infty$$

$$(10) \quad \int g \text{Log } g < 0 \Rightarrow f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$$

2. Si de plus $g(\text{Log } g)^2$ est Lebesgue intégrable, on a

$$(11) \quad \frac{\text{Log } g_k(Z_{t,k}) - (k+1) \int g \text{Log } g}{(\int g(\text{Log } g)^2 - (\int g \text{Log } g)^2)^{1/2} (k+1)^{1/2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$$

et si $\int g \text{Log } g = 0$ on a aussi

$$P(\overline{\lim} f_k(Z_{t,k}) = +\infty) = 1$$

$$P(\underline{\lim} f_k(Z_{t,k}) = 0) = 1.$$

Démonstration:

1. D'après (5) on a

$$\frac{1}{k+1} \text{Log } f_k(Z_{t,k}) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \text{Log } g(X_{t-j}) + \frac{1}{k+1} \text{Log } \varphi_k \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t \right)$$

or, d'après la loi forte des grands nombres

$$\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \text{Log } g(X_{t-j}) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int g \text{Log } g$$

et d'après le théorème 3.1

$$\varphi_k \left(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t \right) - \varphi \left(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t \right) \rightarrow 0$$

mais comme φ est continue

$$\varphi \left(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t \right) \xrightarrow{\text{p.s.}} \varphi(\epsilon_t) > 0$$

on en déduit (8) puis (9) et (10).

2. Soit $U_{t,k}$ le premier membre de (11), il s'écrit

$$U_{t,k} = \frac{\sum_0^k \text{Log } g(X_{t-j}) - (k+1) \int g \text{Log } g}{V_g^{1/2}(k+1)^{1/2}} + \frac{\text{Log } \varphi_k \left(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t \right)}{V_g^{-1/2}(k+1)^{1/2}}$$

où $V_g = \int g(\text{Log } g)^2 - (\int g \text{Log } g)^2$.

Comme $\text{Log } \varphi_k \left(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t \right) \xrightarrow{\text{p.s.}} \text{Log } \varphi(\epsilon_t)$ le théorème central limite entraîne (11).

Maintenant si $\int g \text{Log } g = 0$ on peut considérer l'égalité:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Log } f_k(Z_{t,k})}{\alpha_k} &= \frac{\sum_0^k \text{Log } g(X_i)}{\alpha_k} + \frac{\text{Log } \varphi_k \left(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \epsilon_t \right)}{\alpha_k} \\ &= A_k + B_k \end{aligned}$$

où $\alpha_k = \sqrt{V_g} \sqrt{2(k+1) \text{Log } \text{Log } (k+1)}$

il est clair que $B_k \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ et la loi du logarithme itéré ([6] p. 367) entraîne:

$$P(\overline{\lim} A_k = 1) = P(\underline{\lim} A_k = -1) = 1$$

cela permet de conclure. \square

4 Le cas où ϵ_t est identiquement nul

Pour $\epsilon_t = 0$ la situation est assez différente. Le théorème suivant donne quelques résultats partiels:

Théorème 6. *On suppose que $\epsilon_t = 0$ mais qu'une infinité de a_j sont non nuls: alors:*

1. Si g et $\varphi_k \text{Log } \varphi_k$ ($k \geq 1$) sont Lebesgue intégrables

$$\int g \text{Log } g \geq 0 \Rightarrow m_k \rightarrow +\infty.$$

2. Si, de plus, $a_j = \alpha \rho^j$, $\alpha \in R$, $0 < \rho < 1$, $j \geq 1$, alors la densité de Y_t , soit ψ , est telle que $\psi \text{Log } \psi$ soit Lebesgue intégrable et

$$\int g \text{Log } g > \text{Log } \rho \Rightarrow m_k \rightarrow +\infty$$

$$\int g \text{Log } g = \text{Log } \rho \Rightarrow m_k \rightarrow \int \psi \text{Log } \psi$$

$$\int g \text{Log } g < \text{Log } \rho \Rightarrow m_k \rightarrow -\infty.$$

3. Sous les hypothèses précédentes et si $\int \psi (\text{Log } \psi)^2 < +\infty$

$$\frac{1}{k+1} \text{Log } f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} \int g \text{Log } g + \text{Log } \frac{1}{\rho}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \int g \text{Log } g > \text{Log } \rho &\Rightarrow f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} +\infty \\ \int g \text{Log } g < \text{Log } \rho &\Rightarrow f_k(Z_{t,k}) \xrightarrow{\text{p.s.}} 0. \end{aligned}$$

Enfin si de plus $\int g (\text{Log } g)^2 < \infty$

$$\begin{aligned} \int g \text{Log } g = \text{Log } \rho &\Rightarrow P(\overline{\lim} f_k(Z_{t,k}) = +\infty) \\ &= P(\underline{\lim} f_k(Z_{t,k}) = 0) = 1. \end{aligned}$$

Démonstration:

1. On a encore

$$m_k = (k+1) \int g \text{Log } g + \int \varphi_k \text{Log } \varphi_k$$

or, d'après une propriété de l'entropie (cf. [4])

$$\int \varphi_k \text{Log } \varphi_k \geq \text{Log } \frac{1}{\eta_k \sqrt{2\pi e}}$$

$$\text{où } \eta_k = \sigma \sqrt{\sum_{k+1}^{\infty} a_j^2}$$

donc $\int \varphi_k \text{Log } \varphi_k \rightarrow +\infty$ et par conséquent $m_k \rightarrow +\infty$.

2. Si $a_j = \alpha \rho^j$ la loi de

$$\frac{1}{\rho^{k+1}} \sum_{k+1}^{\infty} \alpha \rho^j X_{t-j} = \sum_{k+1}^{\infty} \alpha \rho^{j-k-1} X_{t-j}$$

ne dépend pas de k et a pour densité ψ . Par conséquent

$$(12) \quad \varphi_k(u) = \frac{1}{\rho^{k+1}} \psi\left(\frac{u}{\rho^{k+1}}\right), \quad u \in R.$$

Comme φ_k est intégrable il en est donc de même pour $\psi \text{Log } \psi$ et

$$\int \varphi_k \text{Log } \varphi_k = \int \varphi \text{Log } \varphi + (k+1) \text{Log } \frac{1}{\rho}$$

on en déduit

$$m_k = (k+1) \left[\int g \text{Log } g + \text{Log } \frac{1}{\rho} \right] + \int \psi \text{Log } \psi$$

d'où les résultats annoncés.

3. Nous étudions maintenant la suite

$$A_k = \frac{1}{k+1} \text{Log } \varphi_k \left(\sum_{k+1}^{\infty} a_j X_{t-j} \right) \quad k \geq 0.$$

D'après (12) nous avons

$$A_k = \text{Log } \frac{1}{\rho} + \frac{1}{k+1} \text{Log } \psi \left(\sum_{k+1}^{\infty} \rho^{j-k-1} X_{t-j} \right)$$

la loi de $W_{t,k} = \sum_{k+1}^{\infty} \rho^{j-k-1} X_{t-j}$ et celle de $\text{Log } \psi(W_{t,k})$ ne dépendent ni de t ni de k , or

$$(\forall \epsilon > 0), P \left(\left| \frac{1}{k+1} \text{Log } \psi(W_{t,k}) \right| > \epsilon \right) \leq \frac{E(\text{Log } \psi(W_{t,k}))^2}{(k+1)^2 \epsilon^2}$$

donc

$$A_k \xrightarrow{\text{p.s.}} \text{Log } \frac{1}{\rho}$$

il suffit maintenant de remarquer que

$$\frac{1}{k+1} \text{Log } f_k(Z_{t,k}) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \text{Log } g(X_{t-j}) + A_k$$

et d'appliquer la loi forte des grands nombres pour obtenir les résultats de convergence presque sûre annoncés. Enfin le dernier résultat provient de la loi du logarithme itéré appliqué aux variables $\text{Log } g(X_i)$. \square

Références

- [1] D. Bosq, Nonparametric estimation of a non linear filter using a density estimator with a zero-one explosive behaviour in \mathbb{R}^d . *Statistics and Decisions* **7**, (1989), 229-241.
- [2] D. Bosq, Asymptotic estimation of a non linear infinite filter. Application to the estimation of Volterra series. Soumis à *Journal of Nonparametric Statistics*.
- [3] P. Malliavin, *Intégration - Analyse de Fourier - Probabilités*. Masson (1982).
- [4] P.A.P. Moran, *An introduction to probability theory*. Oxford (1968).
- [5] J. Neveu, *Martingales à temps discret*. Masson (1972).
- [6] M.M. Rao, *Probability theory with applications*. Acad. Press (1964).

D. Bosq
74 rue Dunois
75013 Paris
France.